

Sur une mesure d'efficacité relative dans la théorie du portefeuille de Markowitz*

Patrick Roger[†]Maxime Merli[‡]

Septembre 2001

Abstract

Dans cet article, nous proposons un indice d'efficacité relative des portefeuilles de titres permettant le classement d'un ensemble de portefeuilles en considérant que l'univers d'investissement est réduit à l'ensemble des titres à classer. Cet indice est basé sur l'équation de la frontière efficace des opportunités d'investissement retenues ; il ne nécessite pas de référence à un taux sans risque ou à un benchmark extérieur. En conséquence, des portefeuilles de nature différente peuvent être classés ; la principale limite de cet indice est toutefois l'impossibilité de classer les portefeuilles situés dans la partie inférieure de la frontière, c'est-à-dire ceux qui sont dominés par le portefeuille de variance minimum.

1 Introduction

Chaque année, les professionnels de marché, la presse financière et même généraliste¹ se livrent à l'exercice périlleux consistant à opérer un classement des SICAV et FCP ; cette information est essentiellement destinée aux investisseurs individuels, clients actuels ou potentiels des différents fonds. Pourtant les gérants de fonds voient dans ces classements la récompense de leur travail acharné ou la promesse de lendemains qui déchantent. Il est néanmoins devenu de plus en plus complexe d'opérer de tels classements et ceux-ci se font généralement par catégories de fonds. Dans le palmarès

*Nous remercions Laurent Weill, Jacques Thépot, Olivier Renault pour leurs commentaires lors de l'élaboration de ce travail, ainsi que les participants du séminaire LARGE de Strasbourg et des Journées Internationales de l'AFFI, Namur 2001. Nous remercions également Vincent Cayrol pour nous avoir signalé une erreur dans une précédente version.

[†]Université Louis Pasteur, Strasbourg I : roger@cournot.u-strasbg.fr

[‡]Université de Franche-Comté : merli@cournot.u-strasbg.fr

¹Le journal Le Monde propose régulièrement un palmarès européen des SICAV, en collaboration avec la société Aptimum (www.aptltd.com), fondé sur l'APT de Ross (1976).

du journal Le Monde, par exemple, il existe une centaine de catégories et le classement d'un fonds est réalisé à l'intérieur de sa catégorie. La raison de cette catégorisation est simple ; une SICAV actions françaises et une SICAV actions allemandes sont évaluées par rapport à deux benchmarks différents et chacune est classée au sein d'un groupe relativement homogène.

Dans un marché de la zone euro sur lequel les investisseurs ne supportent plus de risque de change, l'ensemble de portefeuilles accessibles s'est considérablement élargi et plusieurs milliers de fonds peuvent être choisis. Il est clair qu'un investisseur restreindra ses choix à un sous-ensemble mais ce dernier n'a aucune raison d'être homogène, au sens précédemment évoqué.

La question que nous souhaitons aborder dans ce cadre est celle de la détermination d'un indice de performance relatif, dans un sous-ensemble donné de fonds, sachant que dans l'ensemble des opportunités, il semble difficile de trouver un benchmark applicable à tous les véhicules d'investissement considérés. Par ailleurs, la seule information que nous supposons disponible est l'historique valeurs liquidatives. En d'autres termes, compte tenu de l'activité des gérants, il n'est en général pas possible de dupliquer cette suite de valeurs liquidatives par un portefeuille statique, quel que soit l'ensemble des titres individuels considéré.

Pourtant, la question de la comparaison d'un fonds investi majoritairement en actions et obligations allemandes et d'un portefeuille identique mais investi sur le marché espagnol, est tout à fait d'actualité. Par contre la connaissance des performances de ces fonds par rapport aux indices des bourses de Francfort et Madrid n'est pas suffisante pour opérer un classement.

La théorie financière propose de nombreux indicateurs de performance dont l'objectif est la prise en compte du trade-off entre risque et rentabilité. On peut cependant diviser l'ensemble de ces indicateurs en deux grandes catégories selon que l'évolution de la composition des portefeuilles est supposée connue ou non. Nous allons nous intéresser à cette dernière, en considérant un investisseur qui souhaiterait comparer les performances d'un ensemble de véhicules d'investissement collectif de la zone euro.

Les ratios de Sharpe (1966), de Treynor (1965), ou le α de Jensen (1968) sont les exemples standards de critères de performance prenant en compte le trade-off rentabilité-risque, même si le premier définit le risque à partir de l'écart-type des rentabilités alors que les deux autres prennent en considération le β du portefeuille analysé.

De manière générale, ces indicateurs supposent l'existence d'un actif sans risque et/ou celle d'un portefeuille de marché (ou d'un benchmark commun). Ils reposent en fait sur l'idée de diversification optimale en référence à la théorie du portefeuille de Markowitz (1952-1959) ou au MEDAF².

Dans le contexte du marché euro, l'utilisation d'un proxy comme l'indice Euro-Stoxx50 est encore plus délicate que la référence au CAC40 pour le marché français et la célèbre critique de Roll (1977) concernant le choix du portefeuille de référence prend

²Modèle d'Equilibre des Actifs Financiers de Sharpe (1964), Lintner (1965) et Mossin (1966).

ici tout sons sens. Par ailleurs, la plupart des fonds auxquels nous faisons référence sont constitués d’actions et d’obligations, c’est-à-dire d’actifs risqués, avec une part très faible réservée au cash, c’est-à-dire à l’investissement en actif sans risque. Enfin, comme nous l’avons mentionné plus haut, nous ne connaissons pas la composition des portefeuilles de ces fonds ni l’évolution de celle-ci.

Compte tenu de ces contraintes, nous proposons dans cet article une mesure d’efficacité relative des portefeuilles (permettant donc d’opérer un classement), le terme relatif signifiant que l’univers des opportunités d’investissement est réduit à l’ensemble des fonds étudiés. L’indice que nous proposons repose sur le calcul de la frontière efficiente des actifs risqués (Merton, 1972, Black, 1972), les actifs étant ici les fonds analysés. Nous mesurons ensuite, pour chacun des portefeuilles considérés une sorte de ”distance” par rapport à cette frontière et ce critère va permettre de classer les portefeuilles³. Cet indice présente l’avantage de ne pas faire référence au taux sans risque ou à un benchmark prédéterminé ; cependant, le portefeuille de variance minimum joue un rôle particulier et sert de référence implicite. Toutefois, notre indice d’efficacité relative dépend de l’ensemble des fonds retenus au départ de l’analyse et que l’on cherche à classer.

L’article est organisé de la manière suivante. La section 2 rappelle brièvement les critères classiques de performance et cette section s’appuie sur l’article de Grinblatt et Titman (1995). Dans la section 3, nous calculons la frontière efficiente et rappelons les propriétés du portefeuille de variance minimum. La section suivante décrit l’indice proposé et établit ses propriétés essentielles. Enfin, la section 5 développe, par une approche de simulation, une illustration ainsi qu’une comparaison avec l’indice de Sharpe.

2 Les indices classiques de performance

Les deux éléments essentiels intervenant dans la formulation d’un indice de performance sont, d’une part, l’expression de la rentabilité relativement à une référence prédéfinie et, d’autre part, l’ajustement au risque de cette mesure de rentabilité. Les trois critères que nous rappelons brièvement dans cette section sont les ratios de Sharpe (1966) et Treynor (1965) ainsi que le coefficient α de Jensen (1968). Le point commun de ces trois critères est la nécessité de disposer d’un taux sans risque de référence. Celui-ci intervient de manière directe dans les deux premiers ratios et de manière implicite dans le α de Jensen. De plus, les deux derniers critères s’appuient sur le MEDAF alors que le ratio de Sharpe est fondé sur le risque total du portefeuille mesuré par l’écart-type des rentabilités. Cette formulation est toutefois discutable car, comme le remarquent Grinblatt et Titman (1995), elle suppose implicitement

³Dans l’esprit, notre indicateur suit plutôt une démarche analogue à celle que l’on trouve dans les méthodes DEA (Data Envelopment Analysis) de Charnes, Cooper et Rhodes (1978). La différence importante est que nous ne pouvons nous restreindre à des combinaisons linéaires de variances car les covariances des rentabilités ne peuvent pas être négligées.

que l'investisseur investit dans un seul fonds alors qu'il peut sans difficultés opérer une diversification sur plusieurs portefeuilles.

Pour la formulation de ces trois critères nous supposons que le marché financier comporte N titres, caractérisés par le vecteur des rentabilités \tilde{r} d'espérance $\bar{\mathbf{r}} \in \mathbf{R}^N$ et une matrice de variance-covariance Σ de dimensions (N, N) . Un portefeuille est un vecteur⁴ $y' = (y_1, \dots, y_N)$ vérifiant $y' \mathbf{1} = 1$ où $\mathbf{1}$ est un vecteur de \mathbf{R}^N dont toutes les composantes sont égales à 1. On note $\tilde{R}_y = y' \tilde{r}$ la rentabilité du portefeuille y et $\bar{R}_y = E(\tilde{R}_y)$ son espérance. On a de plus $\sigma_y^2 = y' \Sigma y$ qui désigne la variance de rentabilité de y .

$\beta_y = \frac{\sigma_{My}}{\sigma_M^2}$ est le coefficient β du portefeuille y où σ_{My} est la covariance de la rentabilité du portefeuille y avec celle du portefeuille de marché \tilde{R}_M . Enfin, r_f désigne le taux sans risque.

2.1 Le ratio de Sharpe

Il est noté S_y pour un portefeuille y et défini par :

$$S_y = \frac{\bar{R}_y - r_f}{\sigma_y}$$

Dans l'espace écart-type, espérance (noté (σ, e) dans la suite) ce ratio exprime la pente du segment joignant le point A_f représentatif de l'actif sans risque, de coordonnées $(0, r_f)$ et le point B_y de coordonnées (σ_y, \bar{R}_y) représentatif du portefeuille y . Dans cet espace (σ, e) , le portefeuille y^* qui maximise le ratio de Sharpe est donc celui pour lequel le segment joignant A_f et B_{y^*} est tangent à la frontière efficiente. Il s'agit donc du portefeuille de marché, si l'on envisage le contexte du CAPM.

2.2 Le ratio de Treynor

Le ratio de Treynor d'un portefeuille y est défini par :

$$T_y = \frac{\bar{R}_y - r_f}{\beta_y}$$

D'un point de vue économique, la différence essentielle avec le ratio précédent réside dans la mesure de risque qui normalise l'excès de rentabilité. T_y considère explicitement que, comme seul le risque systématique est rémunéré par le marché, c'est le coefficient β qui doit servir d'unité de risque et la performance d'un portefeuille doit être jugée uniquement sur ce critère.

La relation caractéristique du CAPM s'écrit :

$$\bar{R}_y - r_f = \beta_y (\bar{R}_M - r_f) \quad (1)$$

⁴ y' désigne le transposé du vecteur-colonne y

Par conséquent, un portefeuille situé sur la droite de marché des capitaux aura un T_y égal à $\bar{R}_M - r_f$. Si un gérant possède une capacité de gestion supérieure à la moyenne, le ratio de Treynor sera supérieur à l'excès de rentabilité du portefeuille de marché.

Les avantages de ce critère par rapport au précédent sont clairs et ont déjà été mentionnés plus haut. Ses inconvénients le sont presque autant par rapport au problème que nous considérons dans cet article. Il est nécessaire de disposer d'un portefeuille de marché unique⁵ ; il en est de même pour le taux sans risque.

De ce fait, ce critère semble difficilement utilisable pour comparer différentes SICAV de la zone euro si l'on souhaite pouvoir comparer des fonds essentiellement "domestiques" constitués par des titres de pays distincts.

2.3 Le α de Jensen

Ce coefficient est fondé sur la même idée que le ratio de Treynor tout en ayant une formulation additive alors que la formulation du précédent était multiplicative. Le coefficient α de Jensen est défini pour un portefeuille y par :

$$\alpha_y = \bar{R}_y - r_f - \beta_y (\bar{R}_M - r_f)$$

Au regard de la relation (1), l'interprétation est immédiate. Un portefeuille possédant un coefficient α_y significativement positif surperforme car il se situe au dessus de la droite du marché des capitaux. On peut donc classer les portefeuilles par ordre de coefficient α décroissant. Les difficultés sont les mêmes que pour le ratio précédent puisqu'ici encore, la validité du CAPM est requise pour utiliser cette approche.

De manière plus générale, lorsque le CAPM est vérifié et que le benchmark retenu pour l'étude empirique est efficient, tout portefeuille passif (répondant à une stratégie de *buy and hold*) est efficient et possède un T égal à $\bar{R}_M - r_f$ et un α égal à 0. Tous les portefeuilles passifs sont donc équivalents au regard de ces deux critères. A l'inverse, si le benchmark n'est pas efficient, la critique de Roll (1977) prend tout son sens, à savoir que les rangs de deux portefeuilles peuvent être inversés si l'on change de benchmark.

3 Frontière efficiente et portefeuille de variance minimum

3.1 Notations et hypothèses

Soit un marché financier comportant N titres caractérisés par le vecteur des espérances de rentabilité $\bar{\mathbf{r}}$ et une matrice de variance-covariance Σ ; soit un ensemble

⁵D'un point de vue théorique le portefeuille de marché est évidemment unique mais il est clair que les proxys retenus pour l'analyse empirique dépendent le plus souvent de la nature des titres détenus. S'il s'agit d'actions françaises, on retiendra plus facilement le CAC40 que l'Euro-Stoxx50.

de portefeuilles (des SICAV par exemple) $(x^1, \dots, x^K) \in (\mathbb{R}^N)^K$ dont le vecteur des espérances de rentabilité est noté $\bar{\mathbf{R}} \in \mathbb{R}^K$ et la matrice de variance-covariance \mathbf{V} de dimensions (K, K) .

Les lois des rentabilités des titres individuels sont inconnues mais par contre $\bar{\mathbf{R}}$ et \mathbf{V} sont supposées connues ou peuvent être estimées à partir des données observées sur la valorisation de ces portefeuilles. Cette hypothèse traduit le fait que le marché des titres individuels est très important et que les gérants de SICAV investissent sur des sous-ensembles de ces N titres. Ce peut être le cas si l'on cherche, par exemple, à comparer des véhicules d'investissement internationaux. Les hypothèses habituelles sur \mathbf{V} et $\bar{\mathbf{R}}$ sont les suivantes :

H1 : \mathbf{V} est définie positive

H2 : Il existe au moins deux portefeuilles j et k tels que $\bar{\mathbf{R}}_j \neq \bar{\mathbf{R}}_k$.

H3 : Le marché est parfait ; il n'existe ni coûts de transaction, ni restrictions sur les ventes à découvert.

Si **H1** n'était pas vérifiée, on pourrait construire un portefeuille sans risque et l'on se situe alors dans une problématique différente. Si **H2** n'est pas vérifiée, tous les portefeuilles ont même espérance de rentabilité et le problème ne présente aucun intérêt.

L'objectif est ici de déterminer un classement de ces portefeuilles sur la base des couples $\bar{\mathbf{R}}_k$ et $\sigma_k^2 = \mathbf{V}_{kk}$, toutefois considérés dans un ensemble de titres déterminé. Ceci signifie en particulier que l'indice de performance doit faire intervenir de manière plus ou moins explicite les autres titres en présence. Il s'agit en fait de définir une relation de préférence \succeq sur la base des rentabilités espérées et des variances de ces rentabilités. Cette relation de préférence doit au minimum vérifier les critères élémentaires associés au problème d'optimisation d'un agent dans un espace espérance-variance, à savoir que de deux portefeuilles ayant même variance de rentabilité, celui qui a une espérance de rentabilité supérieure est préféré et si deux portefeuilles génèrent la même rentabilité espérée, celui qui a la variance de rentabilité la plus faible sera choisi par tout agent.

L'intérêt d'une relation de préférence générale réside dans la possibilité de classer deux portefeuilles dont les espérances et les variances de rentabilité sont classées dans le même ordre et qu'il n'y a donc pas de relation de dominance évidente entre eux.

3.2 L'équation de la frontière efficiente

Nous appelons frontière efficiente, les combinaisons de SICAV $y = (y_1, \dots, y_K)$ solutions du problème classique (Markowitz, 1952) d'optimisation :

$$\min_y \frac{1}{2} y' \mathbf{V} y \tag{2}$$

sous les contraintes :

$$y' \mathbf{1} = 1$$

$$y'\overline{\mathbf{R}} \geq e$$

où $\mathbf{1}$ est un vecteur de \mathbf{R}^K dont toutes les composantes sont égales à 1 et e désigne la rentabilité espérée.

Il est utile de remarquer que cette frontière efficiente n'est pas celle que l'on obtiendrait à partir de l'ensemble des titres individuels puisque certains portefeuilles ne sont pas accessibles à partir de combinaisons de SICAV. De plus cette frontière est évaluée à l'aide d'une suite de valeurs liquidatives qui résultent de stratégies de portefeuilles dynamiques. Ceci induit une restriction implicite dans l'utilisation de cette frontière. En effet, si les objectifs du gérant changent de manière notoire, en particulier en termes de risque, le positionnement dans l'ensemble des portefeuilles considérés pourra se modifier de manière sensible.

Posons alors⁶ :

$$\begin{aligned} A &= \overline{\mathbf{R}}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1} \\ B &= \overline{\mathbf{R}}'\mathbf{V}^{-1}\overline{\mathbf{R}} \\ C &= \mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1} \\ D &= BC - A^2 \end{aligned}$$

Comme \mathbf{V} est définie positive, il en est de même de \mathbf{V}^{-1} et de ce fait l'application $(a, b) \rightarrow a'\mathbf{V}^{-1}b$ définit un produit scalaire sur \mathbf{R}^K . Comme de plus, $\mathbf{1}$ et $\overline{\mathbf{R}}$ ne sont pas colinéaires, l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que D est strictement positif.

Tout portefeuille y , caractérisé par une rentabilité espérée ρ_y et une variance de rentabilité σ_y^2 , solution du problème (2), vérifie :

$$C\sigma_y^2 - \frac{C^2}{D} \left(\rho_y - \frac{A}{C} \right)^2 = 1 \quad (3)$$

Dans l'espace espérance-variance, on retrouve l'équation d'une parabole dont le sommet a pour coordonnées $\left(\frac{A}{C}, \frac{1}{C} \right)$, ce qui apparait en réécrivant l'équation 3 sous la forme :

$$\left(\sigma_y^2 - \frac{1}{C} \right) - \frac{C}{D} \left(\rho_y - \frac{A}{C} \right)^2 = 0$$

3.3 Le portefeuille de variance minimum

L'équation ci-dessus permet d'énoncer les propriétés du portefeuille de variance minimum correspondant au sommet de la frontière efficiente.

Lemma 1 Notons $x_{min} \in \mathbf{R}^K$ le portefeuille de variance minimum caractérisé par sa rentabilité \tilde{r}_{min} dont les deux premiers moments sont notés ρ_{min} et σ_{min}^2 ; on a alors,

⁶Ces notations sont empruntées à Merton (1972) ; voir aussi Huang-Litzenberger (1988).

pour tout portefeuille $x \in \mathbb{R}^K$ de rentabilité \tilde{r}_x :

$$\begin{aligned}\rho_{min} &= \frac{A}{C} \\ \sigma_{min}^2 &= \frac{1}{C} \\ Cov(\tilde{r}_{min}; \tilde{r}_x) &= \sigma_{min}^2\end{aligned}$$

On peut alors déduire de ce lemme le corollaire suivant.

Corollary 2 *Pour tout portefeuille $x \in \mathbb{R}^K$ de rentabilité \tilde{r}_x , on a :*

$$\sigma_x^2 - \sigma_{min}^2 = V(\tilde{r}_x - \tilde{r}_{min})$$

Démonstration : Ce résultat est immédiat en développant le membre de droite de l'égalité et en appliquant le dernier résultat du lemme 1 :

$$\begin{aligned}V(\tilde{r}_x - \tilde{r}_{min}) &= \sigma_x^2 + \sigma_{min}^2 - 2Cov(\tilde{r}_{min}; \tilde{r}_x) \\ &= \sigma_x^2 - \sigma_{min}^2\end{aligned}$$

Nous pouvons alors réécrire l'équation de la frontière efficiente à partir des caractéristiques du portefeuille de variance minimum.

Proposition 3 *Tout portefeuille x de la frontière efficiente vérifie :*

$$\frac{E(\tilde{r}_x - \tilde{r}_{min})^2}{V(\tilde{r}_x - \tilde{r}_{min})} = \frac{D}{C} \quad (4)$$

Démonstration :

L'équation de la frontière efficiente s'écrit :

$$\begin{aligned}\left(\sigma_x^2 - \frac{1}{C}\right) - \frac{C}{D} \left(\rho_x - \frac{A}{C}\right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sigma_x^2 - \sigma_{min}^2) - \frac{C}{D} (\rho_x - \rho_{min})^2 &= 0\end{aligned}$$

Le corollaire 2 implique que :

$$V(\tilde{r}_x - \tilde{r}_{min}) - \frac{C}{D} (\rho_x - \rho_{min})^2 = 0$$

Comme $E(\tilde{r}_x - \tilde{r}_{min}) = \rho_x - \rho_{min}$, on obtient immédiatement le résultat voulu.

4 Une mesure d'efficience relative des portefeuilles

4.1 Définition

L'égalité 4 permet de construire une mesure d'inefficience des portefeuilles à partir des remarques suivantes:

-Si x est efficient, tout portefeuille y tel que $\rho_y < \rho_x$ et $\sigma_y = \sigma_x$ est inefficient et $\frac{E(\tilde{r}_y - \tilde{r}_{\min})^2}{V(\tilde{r}_y - \tilde{r}_{\min})} < \frac{D}{C}$.

-Si x est efficient, tout portefeuille y tel que $\rho_y = \rho_x$ et $\sigma_y > \sigma_x$ est inefficient et $\frac{E(\tilde{r}_y - \tilde{r}_{\min})^2}{V(\tilde{r}_y - \tilde{r}_{\min})} < \frac{D}{C}$.

À partir de ces remarques, nous pouvons définir un indicateur d'efficience de la manière suivante.

Definition 4 Pour tout portefeuille x tel que $\rho_x > \rho_{\min}$, on définit l'indicateur d'efficience $I(\sigma_x, \rho_x)$ par :

$$I(\sigma_x, \rho_x) = \frac{C}{D} \frac{E(\tilde{r}_x - \tilde{r}_{\min})^2}{V(\tilde{r}_x - \tilde{r}_{\min})}$$

Sauf mention contraire, cet indicateur sera noté I_x pour simplifier. Il est toutefois bon de remarquer que deux portefeuilles ayant même espérance et même variance de rentabilité auront le même indice d'efficience puisque nous nous situons dans l'espace (σ^2, e) . Le second point important de cette définition est qu'elle est restreinte aux portefeuilles dont l'espérance est supérieure à ρ_{\min} , c'est-à-dire ceux qui sont situés du "bon" côté de la frontière.

Nous avons déjà remarqué que les portefeuilles efficients vérifient $I(x) = 1$; de plus les portefeuilles y se situant sur la droite horizontale d'ordonnée $\frac{A}{C}$ (différents du portefeuille de variance minimum) ont un indice d'efficience $I(y)$ égal à 0. Cependant cet indice n'est pas défini au point $(\sigma_{\min}^2, \rho_{\min})$ alors que ce portefeuille se situe sur la frontière efficiente. Ce problème a une interprétation naturelle ; il vient de la forme de la frontière efficiente qui a une pente infinie au point $(\sigma_{\min}^2, \rho_{\min})$. C'est pourquoi nous avons pris la précaution de définir I uniquement pour les portefeuilles vérifiant $\rho_x > \rho_{\min}$.

4.2 Propriétés de l'indice I

Proposition 5 La fonction I est continue en tout point x tel que $\rho_x > \rho_{\min}$.

Démonstration : Soient x et y deux portefeuilles et h un réel positif ; nous allons montrer que pour tout portefeuille y on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} I((1-h)x + hy) = I(x)$$

$$I((1-h)x + hy) = \frac{C}{D} \frac{E(\tilde{r}_{(1-h)x + hy} - \tilde{r}_{\min})^2}{V(\tilde{r}_{(1-h)x + hy} - \tilde{r}_{\min})}$$

$$\begin{aligned}
E(\tilde{r}_{(1-h)x+hy} - \tilde{r}_{\min}) &= E((1-h)\tilde{r}_x + h\tilde{r}_y - \tilde{r}_{\min}) \\
V(\tilde{r}_{(1-h)x+hy} - \tilde{r}_{\min}) &= V((1-h)\tilde{r}_x + h\tilde{r}_y - \tilde{r}_{\min}) \\
&= V((1-h)\tilde{r}_x + h\tilde{r}_y) + \sigma_{\min}^2 - 2cov((1-h)\tilde{r}_x + h\tilde{r}_y, \tilde{r}_{\min})
\end{aligned}$$

Le lemme 1 implique que le dernier terme du membre de droite est égal à $-2\sigma_{\min}^2$ d'où l'on déduit :

$$V(\tilde{r}_{(1-h)x+hy} - \tilde{r}_{\min}) = V((1-h)\tilde{r}_x + h\tilde{r}_y) - \sigma_{\min}^2$$

De plus $\lim_{h \rightarrow 0} V((1-h)\tilde{r}_x + h\tilde{r}_y) = \sigma_x^2$ et $\lim_{h \rightarrow 0} E((1-h)\tilde{r}_x + h\tilde{r}_y) = e_x$ et l'on peut à nouveau utiliser la propriété du lemme 1 pour obtenir :

$$\lim_{h \rightarrow 0} I((1-h)x + hy) = I(x)$$

■

Dans une économie telle que nous la considérons, c'est-à-dire sans actif sans risque, tous les portefeuilles de la frontière efficiente sont équivalents dans le sens où ils minimisent la variance de rentabilité pour une espérance donnée. Nous n'imposons pas de benchmark particulier, comme cela a été mentionné dans l'introduction. La propriété suivante caractérise le portefeuille x^* situé sur la frontière efficiente et qui présente la même espérance de rentabilité que le portefeuille x . Ce portefeuille interviendra explicitement dans la caractérisation de l'indice I_x .

Proposition 6 *Soit x un portefeuille quelconque et x^* le portefeuille de la frontière efficiente tel que $\rho_x = \rho_{x^*}$ on a*

$$Cor^2(\tilde{r}_x, \tilde{r}_{x^*}) = \sup_{y \in \mathcal{F}} Cor^2(\tilde{r}_x, \tilde{r}_y) = \frac{\sigma_{x^*}^2}{\sigma_x^2}$$

où \mathcal{F} est l'ensemble des portefeuilles de la frontière efficiente et $Cor(\tilde{r}_x, \tilde{r}_y)$ est la corrélation des rentabilités des portefeuilles x et y .

Démonstration ⁷

Pour tout portefeuille efficient x^* , il existe un portefeuille x^c , appelé portefeuille conjugué, tel que $cov(\tilde{r}_{x^*}, \tilde{r}_{x^c}) = 0$. On sait de plus que l'espérance de rentabilité de n'importe quel portefeuille z vérifie:

$$E(\tilde{r}_z) = \beta_{x^*z} E(\tilde{r}_{x^*}) + (1 - \beta_{x^*z}) E(\tilde{r}_{x^c})$$

avec $\beta_{x^*z} = \frac{cov(\tilde{r}_{x^*}, \tilde{r}_z)}{\sigma_{x^*}^2}$.

Cette relation est vraie, en particulier pour x ; par conséquent :

$$E(\tilde{r}_x) = \beta_{x^*x} E(\tilde{r}_{x^*}) + (1 - \beta_{x^*x}) E(\tilde{r}_{x^c})$$

⁷Ce résultat peut-être déduit directement de la proposition 3 de Kandel-Stambaugh (1987). Nous donnons cependant une démonstration par souci d'homogénéité.

On en déduit alors :

$$cor(\tilde{r}_x, \tilde{r}_{x^*}) = \frac{\sigma_{x^*}}{\sigma_x} \frac{\rho_x - \rho_{x^c}}{\rho_{x^*} - \rho_{x^c}} \quad (5)$$

en remplaçant β_{x^*x} par sa valeur. Dans le cas particulier où $\rho_x = \rho_{x^*}$ on remarque que :

$$cor(\tilde{r}_x, \tilde{r}_{x^*}) = \frac{\sigma_{x^*}}{\sigma_x}$$

Pour conclure, il faut utiliser le fait que la tangente à la frontière efficiente, (dans l'espace espérance-écart-type) en un portefeuille x^* , coupe l'axe des ordonnées en un point dont l'ordonnée⁸ est ρ_{x^c} . En notant y le portefeuille situé sur cette tangente mais vérifiant $\rho_x = \rho_y$, on a :

$$\frac{E(\tilde{r}_y) - E(\tilde{r}_{x^c})}{\sigma_y} = \frac{E(\tilde{r}_{x^*}) - E(\tilde{r}_{x^c})}{\sigma_{x^*}}$$

ce qui permet de réécrire l'équation 5 :

$$cor(\tilde{r}_x, \tilde{r}_{x^*}) = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \frac{E(\tilde{r}_x) - E(\tilde{r}_{x^c})}{E(\tilde{r}_y) - E(\tilde{r}_{x^c})} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

Comme par construction, $\sigma_y \leq \sigma_{x^*}$, la corrélation maximale est bien obtenue pour $y = x^*$, ce qui achève la démonstration. ■

Nous pouvons maintenant traduire la valeur de I_x en termes de "distance" à la frontière efficiente.

Proposition 7 *L'indice I_x s'exprime en fonction de $\sigma_{x^*}^2$, σ_x^2 , σ_{\min}^2 sous la forme :*

$$I_x = \frac{\sigma_{x^*}^2 - \sigma_{\min}^2}{\sigma_x^2 - \sigma_{\min}^2}$$

où x^* est défini comme dans la proposition précédente.

Démonstration :

$$I_x = \frac{C}{D} \frac{E(\tilde{r}_x - \tilde{r}_{\min})^2}{V(\tilde{r}_x - \tilde{r}_{\min})} = \frac{C}{D} \frac{(\rho_x - \rho_{\min})^2}{(\sigma_x^2 - \sigma_{\min}^2)}$$

ce qui équivaut à :

$$I_x (\sigma_x^2 - \sigma_{\min}^2) - \frac{C}{D} (\rho_x - \rho_{\min})^2 = 0$$

Comme par ailleurs x^* est un portefeuille efficient, on a aussi :

$$\sigma_{x^*}^2 - \sigma_{\min}^2 - \frac{C}{D} (\rho_{x^*} - \rho_{\min})^2 = 0$$

⁸Voir Quittard-Pinon (1998), Théorème 3, p 93.

En utilisant l'hypothèse $\rho_x = \rho_{x^*}$, on aboutit à :

$$I_x = \frac{\sigma_{x^*}^2 - \sigma_{\min}^2}{\sigma_x^2 - \sigma_{\min}^2}$$

Le complémentaire à 1 de l'indice I_x s'écrit :

$$P_x = 1 - I_x = \frac{\sigma_x^2 - \sigma_{x^*}^2}{\sigma_x^2 - \sigma_{\min}^2}$$

Les portefeuilles x et x^* offrent la même rentabilité, P_x mesure de ce fait le pourcentage de variance "gaspillé" par le portefeuille x au regard des opportunités d'investissement retenues. L'indice I_x a par ailleurs des propriétés géométriques outre le fait qu'il est le rapport des tangentes des angles θ_x et θ_{x^*} où θ_x (resp. θ_{x^*}) est l'angle que fait la droite passant par x (resp x^*) et x_{\min} avec l'axe horizontal.

4.3 Interprétation géométrique

Cette interprétation est fondée sur la définition focale des paraboles que nous rappelons ci-dessous.

Definition 8 Soit Δ une droite et F un point du plan ; on appelle parabole de foyer F et de directrice Δ l'ensemble des points du plan équidistants de F et Δ .

Dans l'espace (e, σ^2) , la frontière efficiente est une parabole dont le foyer F de coordonnées (ρ_F, σ_F^2) vérifie $\rho_F = \rho_{\min}$ et la directrice Δ est une droite horizontale. Le sommet de la frontière étant le portefeuille de variance minimum, on peut écrire :

$$\begin{aligned} F &= (\rho_{\min}, \sigma_{\min}^2 + c) \\ \forall x \in \Delta, \sigma_x^2 &= \sigma_{\min}^2 + c \end{aligned}$$

si $x = (\rho_x, \sigma_x^2)$.

On a alors la proposition suivante.

Proposition 9 La distance entre le portefeuille de variance minimum et le foyer de la parabole est $c = \frac{4D}{C}$.

Démonstration : voir annexe

Considérons maintenant une courbe de niveau de l'indice I_x , c'est-à-dire l'ensemble des portefeuilles vérifiant $I_x = k < 1$.

Par définition de l'indice, ces portefeuilles vérifient l'équation :

$$I_x (\sigma_x^2 - \sigma_{\min}^2) - \frac{C}{D} (\rho_x - \rho_{\min})^2 = 0$$

qui peut encore s'écrire :

$$(\sigma_x^2 - \sigma_{\min}^2) - \frac{C}{kD} (\rho_x - \rho_{\min})^2 = 0$$

Il s'agit encore d'une parabole de foyer F_k et de directrice Δ_k . En utilisant la même méthode de démonstration que pour la proposition précédente, on obtient la proposition suivante.

Proposition 10 *La valeur de l'indice I_x est caractérisée par :*

$$I_x = \frac{d(x_{\min}, F_{I_x})}{d(x_{\min}, F)}$$

où F_{I_x} est le foyer de la parabole comportant tous les portefeuilles y ayant la même valeur d'indice que x , et F est le foyer de la frontière efficiente.

4.4 Exemple

A titre de simple illustration, considérons 3 fonds, notés x^1, x^2, x^3 , caractérisés par les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{R}}' &= (0.08; 0.10; 0.12) \\ \mathbf{V} &= \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0.03 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'équation de la frontière efficiente est donnée par :

$$(\sigma_{x^*}^2 - 5.45 \times 10^{-3}) + 22.917 (\rho_{x^*} - 0.0927)^2 = 0$$

La matrice X ci-après donne la composition des trois portefeuilles (en lignes) de la frontière ayant les mêmes espérances de rentabilité que les trois fonds initiaux ; $V(x^*)$ indique les trois variances correspondantes.

$$X = \begin{bmatrix} 0.9167 & 0.1667 & -0.0833 \\ 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 \\ -0.25 & 0.5 & 0.75 \end{bmatrix}$$

De plus, les variances de rentabilité de ces trois portefeuilles sont données par :

$$V(x^*) = \begin{bmatrix} 9.2 \times 10^{-3} & 6.7 \times 10^{-3} & 22.5 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

à comparer aux variances des trois fonds données dans la matrice V .

On voit sur l'équation de la frontière efficiente que le premier fonds ne se situe pas dans la "bonne moitié" et son indice n'est pas significatif ($N.S$ dans le tableau

	x^1	x^2	x^3
I_x	N.S	0.083	0.694
$S(r = 0)$	0.8	0.707	0.693
$S(r = 5\%)$	0.3	0.353	0.404

Table 1: Indice I et ratios de Sharpe

1). Ceci est confirmé par le fait que la variance de rentabilité, calculée ci-dessus est supérieure à celle du portefeuille dont la rentabilité espérée est de 10%. Dans le tableau 1, nous faisons figurer l'indice de Sharpe calculé avec un taux sans risque nul ainsi qu'avec un taux égal à 5%, ce choix étant bien sûr arbitraire mais représentant une prime de 4% environ pour le portefeuille de variance minimum.

L'élément que nous souhaitons mettre en avant concerne la régularité de l'indice de Sharpe alors que I_x varie beaucoup entre x^2 et x^3 . Ceci s'explique par le fait que le deuxième fonds a un portefeuille x^* très proche du portefeuille x_{\min} . En conséquence, une quantité importante de "risque inutile" est prise dans ce fonds, par rapport à ce qu'il est possible de faire dans l'univers des trois fonds. On peut même remarquer qu'avec un taux sans risque nul, le sens de variation de I_x et de l'indice de Sharpe sont opposés. Ce phénomène est bien sûr dû à la référence différente pour les deux indices puisque, comme nous l'avons mentionné à plusieurs reprises, l'indice I_x est destiné à classer les fonds dans un univers limité aux fonds que l'on souhaite classer.

La figure 1 représente les courbes de niveau de l'indice I pour les valeurs 0.6;0.8 et 1. Les trois foyers correspondants sont représentés sur la verticale passant par le sommet de la parabole. Le segment SF joignant le foyer de la frontière efficiente au portefeuille de variance minimum contient tous les foyers des courbes de niveau de l'indice pour I_x variant de 0 à 1.

Cependant, un problème reste posé en ce qui concerne les portefeuilles tels que $\rho_x < \rho_{\min}$. En effet, mathématiquement, le calcul de l'indice reste possible pour ces portefeuilles et sa valeur est positive alors que ces portefeuilles ne se situent pas dans la "bonne" moitié de la frontière.

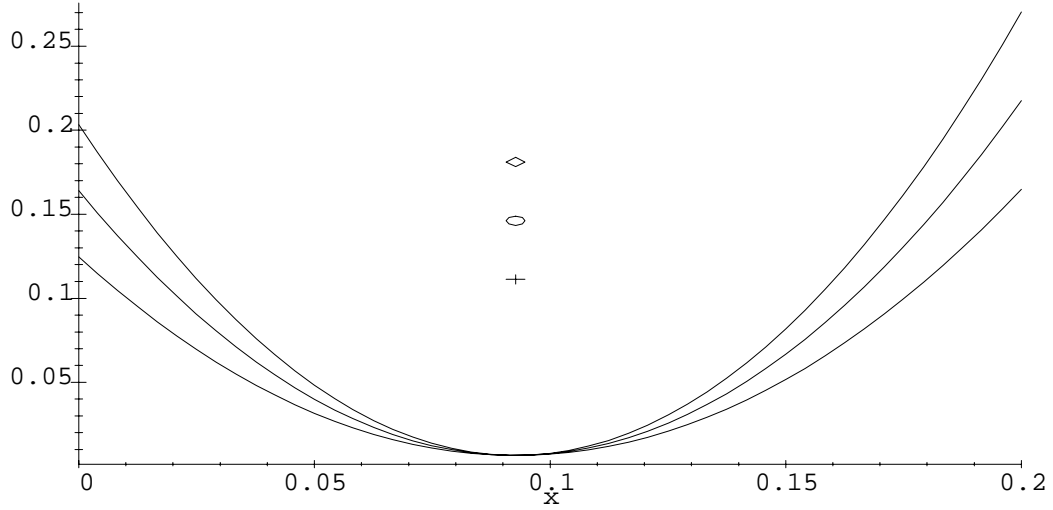
5 Simulations

5.1 Présentation générale

Afin de tester la validité de l'indice proposé et de comparer les résultats avec ceux donnés par l'indice de Sharpe notamment, nous simulons des rentabilités à partir d'un modèle multifactoriel comme celui développé dans le cadre de l'APT de Ross (1976). Nous supposons que les rentabilités sont engendrées par un processus du type suivant:

$$\tilde{r}_k = E(\tilde{r}_k) + \sum_{j=1}^J \beta_{jk} \tilde{F}_j + \tilde{\varepsilon}_k$$

Figure 1: Courbes de niveau de l'indice I_x



où J désigne le nombre de facteurs communs du processus de rentabilité, les variables \tilde{F}_j désignent les facteurs communs et $\tilde{\varepsilon}_k$ représente le risque spécifique de l'actif k .

Il suffit alors de simuler les facteurs communs et le risque spécifique en utilisant les hypothèses du modèle de Ross, à savoir :

$$\begin{aligned} cov(\tilde{F}_j, \tilde{F}_{j'}) &= \delta_{jj'} \\ cov(\tilde{F}_j, \tilde{\varepsilon}_k) &= 0 \end{aligned}$$

avec $\delta_{jj'}$ égal à 1 si $j = j'$ et 0 sinon.

Le tirage aléatoire des différentes variables sera fait selon une loi normale centrée réduite pour les facteurs communs et une loi normale centrée d'écart-type σ_k pour les variables $\tilde{\varepsilon}_k$.

Par conséquent, pour tout titre k on a :

$$\begin{aligned} \sigma^2(\tilde{r}_k) &= \sum_{j=1}^J \beta_{jk}^2 + \sigma_k^2 \\ cov(\tilde{r}_k, \tilde{r}_{k'}) &= \sum_{j=1}^J \beta_{jk} \beta_{jk'} \end{aligned}$$

Les coefficients β_{jk} sont tirés selon une loi uniforme sur l'intervalle $[-0.06; 0.14]$, les σ_k selon une loi uniforme sur l'intervalle $[0; 0, 25]$.

On en déduit alors :

$$E_U [\beta_{jk}^2] = V_U [\beta_{jk}] + E_U [\beta_{jk}]^2 = \frac{0.04}{12} = \frac{1}{3} \times 10^{-2}$$

où E_U et V_U désignent les espérance et variance sous la loi uniforme considérée. La variance des rentabilités aura donc une valeur moyenne égale à $\frac{1}{3} \times 10^{-2} + 0.0625 = 6.5833 \times 10^{-2}$ soit un écart-type moyen égal à $\sqrt{6.5833 \times 10^{-2}} = 25,66\%$

Le tirage des espérances de rentabilité peut se faire de manière complètement aléatoire mais nous avons préféré introduire un lien entre l'espérance et l'écart-type sous une forme indirecte. Plus précisément, nous avons imposé la relation :

$$E(\tilde{r}_k) = \sigma_k + 0,2 \times (U - 0,3)$$

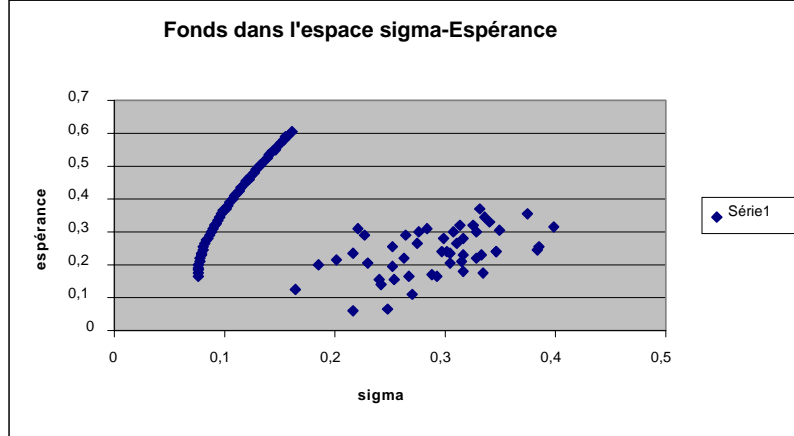
où U est une loi uniforme sur $[0; 1]$.

Il est clair que ce lien est introduit de manière arbitraire ; il s'agit simplement de permettre une comparaison entre l'indice proposé et l'indice de Sharpe notamment.

5.2 Illustration

Nous avons simulé les rentabilités de 50 fonds ; la figure 2 donne, dans l'espace (σ, e) les positions des portefeuilles ainsi que la frontière efficiente.

Figure 2: Portefeuilles dans l'espace $\sigma - E$



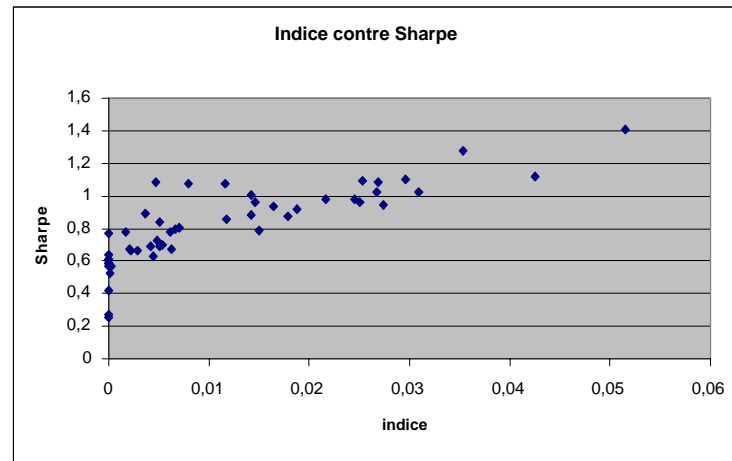
La figure 3 montre la relation entre l'indice proposé en abscisse et l'indice de Sharpe en ordonnée. On constate tout d'abord que I prend des valeurs faibles mais, rappelons-le, il s'agit du carré de la corrélation entre le portefeuille concerné et le portefeuille de même rentabilité espérée situé sur la frontière efficiente. De plus, l'indice est fixé à 0 pour les fonds dont la rentabilité espérée est inférieure à celle

σ	E	I	S
18,51%	20,08%	0,005	1,085
20,22%	21,68%	0,008	1,072
21,68%	23,28%	0,012	1,074

Table 2: Paramètres de trois portefeuilles

du portefeuille de variance minimum. Par ailleurs, comme nous n'avons pas défini de taux sans risque, l'indice de Sharpe est calculé avec un taux sans risque nul ; il s'agit donc du rapport de l'espérance à l'écart-type de rentabilité. Il est à noter que l'introduction d'un taux sans risque ne modifie pas l'allure du nuage de points mais va réduire la valeur de l'indice de Sharpe. On constate donc globalement une relation quadratique entre les deux indices mais avec de nombreuses interversions de classement.

Figure 3: Indice de Sharpe contre I



On constate par exemple que trois points ont un indice de Sharpe pratiquement identique, de l'ordre de 1,08 avec des valeurs de I variant entre 0.005 et 0.012. Ces trois portefeuilles sont décrits dans le tableau 2.

Ces trois portefeuilles ont des espérances très proches des écart-types, expliquant la valeur de l'indice de Sharpe ; toutefois, on constate que dans cette situation, notre indice privilégie les portefeuilles à espérance plus élevée.

5.3 La relation entre I et S

5.3.1 Le cas $r_f = 0$

Pour affiner quelque peu la comparaison entre I et l'indice de Sharpe, nous allons analyser l'évolution de I sur une courbe de niveau de l'indice de Sharpe. En d'autres termes, supposons que S est fixé et exprimons l'indice I en utilisant la relation $E(\tilde{r}_x) = S\sigma_x$, en supposant que le taux sans risque est nul. L'indice I s'exprime alors sous la forme :

$$I(\sigma_x, \rho_x) = \frac{C}{D} \frac{(S\sigma_x - \rho_{\min})^2}{\sigma_x^2 - \sigma_{\min}^2}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \sigma} &= \frac{C}{D} \frac{2S(\sigma_x^2 - \sigma_{\min}^2)(S\sigma_x - \rho_{\min}) - 2\sigma_x(S\sigma_x - \rho_{\min})^2}{(\sigma_x^2 - \sigma_{\min}^2)^2} \\ &= 2 \frac{C}{D} \frac{(S\sigma_x - \rho_{\min})}{(\sigma_x^2 - \sigma_{\min}^2)^2} (S(\sigma_x^2 - \sigma_{\min}^2) - \sigma_x(S\sigma_x - \rho_{\min})) \\ &= 2 \frac{C}{D} \frac{(S\sigma_x - \rho_{\min})}{(\sigma_x^2 - \sigma_{\min}^2)^2} (\sigma_x \rho_{\min} - S\sigma_{\min}^2) \end{aligned}$$

C'est le dernier terme du produit qui détermine le signe de la dérivée puisque le premier est toujours positif par définition de S , pour tout portefeuille tel que $\rho_x > \rho_{\min}$. Pour les valeurs de $S < \frac{\sigma_x \rho_{\min}}{\sigma_{\min}^2}$, I est croissant par rapport à σ_x et il devient décroissant lorsque le signe de l'inégalité est inversé.

L'inégalité $S < \frac{\sigma_x \rho_{\min}}{\sigma_{\min}^2}$ s'écrit encore :

$$\frac{\rho_x}{\sigma_x^2} < \frac{\rho_{\min}}{\sigma_{\min}^2}$$

Sur la figure 4, on constate que cette inégalité divise l'ensemble des deux portefeuilles en deux sous-ensembles. Ceux qui sont situés au dessus de la droite D voient la valeur de l'indice diminuer lorsque l'écart-type augmente et c'est le phénomène inverse qui se produit pour les portefeuilles situés sous la droite. Rappelons cependant que ce raisonnement est fait à S constant ce qui implique qu'une variation ε de σ_x correspond à une variation εS de l'espérance.

5.3.2 Le cas $r_f > 0$

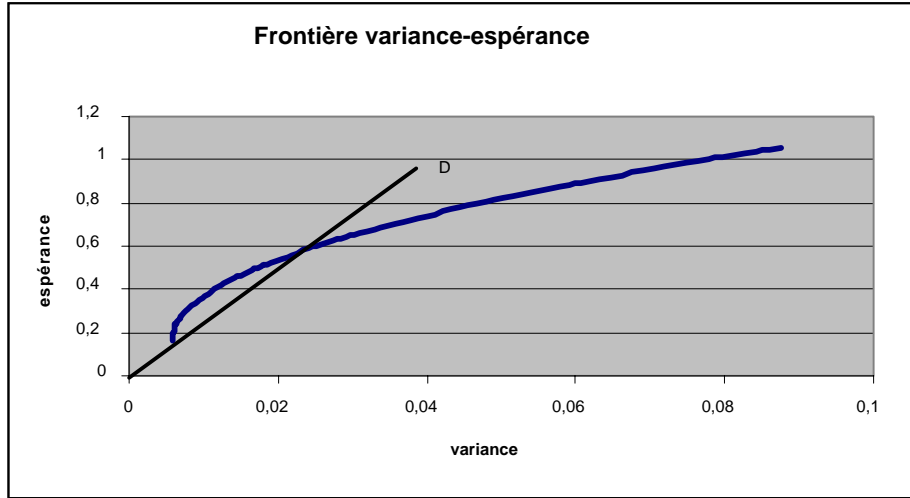
Si le taux sans risque est strictement positif, on a la relation :

$$\rho_x = S\sigma_x + r_f$$

En procédant comme précédemment, on obtient :

$$I(\sigma_x, \rho_x) = \frac{C}{D} \frac{(S\sigma_x + r_f - \rho_{\min})^2}{\sigma_x^2 - \sigma_{\min}^2}$$

Figure 4: Frontière (σ^2, e)



d'où l'on déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \sigma} &= \frac{C}{D} \frac{2S(\sigma_x^2 - \sigma_{\min}^2)(S\sigma_x + r_f - \rho_{\min}) - 2\sigma_x(S\sigma_x + r_f - \rho_{\min})^2}{(\sigma_x^2 - \sigma_{\min}^2)^2} \\ &= 2 \frac{C}{D} \frac{(S\sigma_x + r_f - \rho_{\min})}{(\sigma_x^2 - \sigma_{\min}^2)^2} (S(\sigma_x^2 - \sigma_{\min}^2) - \sigma_x(S\sigma_x + r_f - \rho_{\min})) \end{aligned}$$

Par définition de S , le premier terme du produit est ici encore positif ; le signe de la dérivée est à nouveau déterminé par le signe de $(\sigma_x \rho_{\min} - r_f - S\sigma_{\min}^2)$. On en déduit donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \sigma} &> 0 \Leftrightarrow S(\sigma_x^2 - \sigma_{\min}^2) - \sigma_x(S\sigma_x + r_f - \rho_{\min}) > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\rho_x - r_f}{\sigma_x^2} > \frac{\rho_x - \rho_{\min}}{\sigma_x^2 - \sigma_{\min}^2} \end{aligned}$$

L'interprétation géométrique reste identique à celle du cas précédent en prenant comme axe de référence la droite $y = r_f$ dans l'espace variance-espérance. Il suffirait donc dans la figure 4 de déplacer l'origine au point $(0, r_f)$.

6 Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé un indicateur d'efficacité relative partant du principe que le classement de fonds ou de SICAV doit être réalisé dans l'univers d'investissement des fonds à classer, indépendamment des opportunités d'investissement

existant en dehors de l'univers réduit aux fonds dont on souhaite établir le classement. Cet a priori s'appuie sur la constatation que l'évolution du nombre de fonds sur le marché de la zone euro conduit à multiplier les catégories et les benchmarks, rendant les classements assez peu informatifs lorsqu'il s'agit de comparer des fonds appartenant à deux catégories différentes.

L'indicateur proposé a une interprétation naturelle en termes de maximisation de la corrélation avec les portefeuilles de la frontière efficiente. Il est aussi en relation avec l'indice de Sharpe avec toutefois un point de référence différent puisque les variables considérées sont les écarts de rentabilité entre le fonds analysé et le portefeuille de variance minimum de l'univers retenu.

En ce sens, il s'agit d'une mesure intuitive de l'efficience dans le cadre que nous nous sommes fixés. Notre indice souffre cependant d'une faiblesse car il n'est pas calculable sur la partie inférieure de la frontière alors qu'il peut exister des situations dans lesquelles certains portefeuilles situés sur la partie inférieure de l'ensemble des portefeuilles ne sont pas dominés par des fonds (et non des portefeuilles de fonds) existant sur la moitié supérieure. La difficulté provient de la valeur 0 de l'indice sur l'horizontale correspondant à la valeur ρ_{\min} . En effet, pour qu'un indice de performance soit cohérent, il est nécessaire que sa valeur diminue quand l'écart-type augmente, toutes choses égales par ailleurs. Il n'est donc pas aisé de transposer la définition sur la partie supérieure à la partie inférieure.

Les prolongements de ce travail se situent dans au moins deux directions; la première consiste à réaliser une étude empirique développée en intégrant des catégories de fonds de natures diverses de façon à pousser plus avant l'analyse de la pertinence de l'indice proposé. La seconde direction de recherche concerne la robustesse du classement obtenu à travers cet indice. En particulier, il s'agit d'étudier si le classement obtenu est très sensible à des modifications marginales de l'univers d'investissement retenu. Cette partie est en cours de réalisation et repose sur des simulations consistant, à partir d'un univers fixé initialement, à supprimer une partie des fonds et à reconstruire un classement des fonds restants.

Annexe

Démonstration de la proposition 9 :

Par définition de la parabole, on a, pour tout portefeuille x^* de la frontière :

$$d^2(x^*, F) = d^2(x^*, \Delta)$$

On peut alors, par l'intermédiaire de cette relation, écrire :

$$(\rho_{x^*} - \rho_{\min})^2 + (\sigma_{x^*}^2 - \sigma_{\min}^2 - c)^2 = (\sigma_{x^*}^2 - \sigma_{\min}^2 + c)^2$$

si l'on considère que les points x^* ont comme coordonnées $(\rho_{x^*}, \sigma_{x^*}^2)$.

On transforme aisément cette relation sous la forme :

$$(\rho_{x^*} - \rho_{\min})^2 = 4c (\sigma_{x^*}^2 - \sigma_{\min}^2)$$

L'équation de la frontière efficiente, quant à elle, s'écrit :

$$(\sigma_{x^*}^2 - \sigma_{\min}^2) - \frac{C}{D} (\rho_{x^*} - \rho_{\min})^2 = 0$$

on obtient donc $c = \frac{4D}{C}$.

References

- [1] Black, F. (1972), "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing", *Journal of Business*, 45, 444-54.
- [2] Charnes, A., Cooper, W.W. and E. Rhodes (1978), "Measuring the Efficiency of Decision Making Units", *European Journal of Operational Research*, 2, 429-44.
- [3] Grinblatt, M. et Titman, S. (1995), "Performance Evaluation", in R. Jarrow ed., *Handbook in Operations Research and Management Science*, Elsevier Science.
- [4] Huang, C., F. et Litzenberger, R. (1988), "*Foundations for Financial Economics*", Noth Holland.
- [5] Jensen, M. (1968), "The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-1964", *Journal of Finance*, 23, 389-416.
- [6] Kandel, S. et Stambaugh, R.F. (1987), "On Correlations and Inferences about Mean-Variance Efficiency", *Journal of Financial Economics*, 18, 61-90.
- [7] Lintner, J. (1965), "The Valuation of Risky Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets", *Review of Economics and Statistics*, 47, 13-37.
- [8] Markowitz, H. (1952), "Portfolio Selection", *Journal of Finance*, 7, p77-91.
- [9] Markowitz, H. (1959), "*Portfolio Selection : Efficient Diversification of Investment*", Wiley New York.
- [10] Merton, R. (1972), "An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Sep, 1851-72.
- [11] Mossin, J. (1966), "Equilibrium in a Capital Asset Market", *Econometrica*, 34, p261-76.
- [12] Quittard-Pinon, F. (1998), "*Marché des Capitaux et Théorie Financière*", Economica, 2nde édition.
- [13] Roger, P. (1996), "*L'Evaluation des Actifs Financiers : Modèles à Temps Discret*", Deboeck Université, Bruxelles.
- [14] Roll, R. (1977), "A critique of the Asset Pricing Theory's Tests", *Journal of Financial Economics*, 4, 129-76.
- [15] Ross, S. (1976), "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing", *Journal of Economic Theory*, 13, 341-60.

- [16] Sharpe, W. (1964), " Capital Asset Prices : a Theory of market equilibrium under Conditions of Risk", *Journal of Finance*, 19, 425-42.
- [17] Sharpe, W. (1966), " Mutual Fund Performance, *Journal of Business*, 39, 119-38.
- [18] Treynor, J. (1965), "How to Rate Management of Investment Funds", *Harvard Business Review*, 43, 63-75.